

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère les points $A(-1, 1, 0)$; $B(1, 0, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 1, -1)$ et de rayon est $R = 3$

- 1) a) Montrer que : $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que : $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)
- 1) b) Vérifier que $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$ et en déduire que le plan (OAB) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{6}$
- 2) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (OAB)
- 0,5 a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)
- 0,5 b) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ)

Exercice 2 (3 points) :

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) les point A, B et C d'affixes respectives $a = 7 + 2i$, $b = 4 + 8i$ et $c = -2 + 5i$

- 0,75 1) a) Vérifier que : $(1 + i)(-3 + 6i) = -9 + 3i$ et montrer que : $\frac{c-a}{b-a} = 1 + i$
- 1) b) En déduire que : $AC = \sqrt{2}AB$ et donner une mesure de l'angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC})
- 2) On considère la rotation R de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- 0,75 a) Montrer que l'affixe du point D, image du point A par R, est $d = 10 + 11i$
- 0,5 b) Calculer $\frac{d-c}{b-c}$. Puis en déduire que les points B, C et D sont alignés

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 10 boules : 5 d'entre elles sont rouges, 3 boules vertes, 2 boules blanches

On tire au hasard et simultanément 4 boules dans l'urne et on considère les événements suivants :

A : « Obtenir 2 boules rouges et 2 boules vertes »

B : « Il n'existe aucune boule blanche parmi les boules tirées »

- 1,5 1) Montrer que : $p(A) = \frac{1}{7}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$
- 2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées
- 0,25 a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1, 2
- 0,25 b) Montrer que : $p(X = 1) = \frac{8}{15}$ et déterminer la loi de probabilité de X



Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \frac{25}{10-u_n}$

1) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$, et montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , 5 - u_n > 0$$

2) On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{5}{5-u_n}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{10-u_n}{5-u_n}$ et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = 1$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$, puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 5 - \frac{5}{n}$

c) Préciser : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 5 (8 points) :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = (x-2)^2 e^x$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm

1) a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et en déduire que la courbe (C_f) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

2) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x - 4x e^x + 4e^x$

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat (rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^n = 0$)

3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x(x-2)e^x$

b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et décroissante sur $[0, 2]$

c) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

4) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x^2 - 2)e^x$ et en déduire que f possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de calculer leur ordonné

b) Tracer la courbe (C_f)

5) a) Montrer que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de $h : x \mapsto x e^x$ sur \mathbb{R} , et calculer : $\int_0^1 x e^x dx$

b) En intégrant par parties, montrer que : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

c) Montrer que l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et le droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$ est $5(e-2)cm^2$

6) En s'aidant de la courbe (C_f) , donner dans \mathbb{R} le nombre de solutions de l'équations : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

